2021

MATHEMATICS — GENERAL

Paper : GE/CC-2

Full Marks : 65

Candidates are required to give their answers in their own words as far as practicable.

প্রান্তলিখিত সংখ্যাগুলি পূর্ণমান নির্দেশক।

[Throughout the question paper, notations/symbols carry their usual meanings]

বিভাগ - ক

(মান : ১০)

১। সঠিক উত্তর বেছে নাও ঃ ১×১০

(ক) $\left\{(-1)^n \cdot n\right\} = \{-1, 2, -3, 4, ...\}$ অনুক্রমটি হল

(অ) নীচে সীমাবদ্ধ (আ) উপরে সীমাবদ্ধ

(ই) দোদুল্যমান (ঈ) এদের কোনোটিই নয়।

(খ) যদি $f(x) = (x-1)^3, x \in R$ হয়, তাহলে,

(অ) $x = 1$-এ f-এর চরম মান আছে।

(আ) $x = 1$-এ f-এর অবম মান আছে।

(ই) $x = 1$-এ f-এর চরম বা অবম কোনো মান নাই।

(ঈ) এদের কোনোটিই নয়।

(গ) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{(n+2)(n+3)}$ শ্রেণিটি

(অ) অভিসারী (আ) অপসারী

(ই) দোদুল্যমান (ঈ) এদের কোনোটিই নয়।

(ঘ) $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = e^x$ অবকল সমীকরণটির বিশেষ অবিচ্ছেদ্য (P.I.) হল

(অ) $\frac{1}{2}x^2e^x$ (আ) x^2e^x

(ই) xe^x (ঈ) এদের কোনোটিই নয়।

(ঙ) $\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$ -এর মান হল

(অ) 1 (আ) $\frac{1}{2}$

(ই) $\frac{1}{3}$ (ঈ) $\frac{1}{6}$।

(চ) যদি $|\vec{p}|=10, |\vec{q}|=1$ এবং $|\vec{p}\times\vec{q}|=8$ হয় তখন $\vec{p}\cdot\vec{q}$ -এর মান হল

(অ) 4 (আ) 8

(ই) 6 (ঈ) এদের কোনোটিই নয়।

(ছ) $\vec{\alpha}=2\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}$ এবং $\vec{\beta}=3\hat{i}+4\hat{k}$ ভেক্টর দুটির মধ্যবর্তী কোণ-এর মান হল

(অ) $\cos^{-1}\left(\frac{2}{15}\right)$ (আ) $\cos^{-1}\left(\frac{1}{15}\right)$

(ই) $\cos^{-1}\left(\frac{1}{5}\right)$ (ঈ) $\cos^{-1}\left(\frac{4}{15}\right)$।

(জ) বুলীয় বীজগণিতে $xy(x'+y')$ -এর মান হল

(অ) 1 (আ) x^2

(ই) y^2 (ঈ) 0।

(ঝ) $az + b = a^2x + y$ অপেক্ষকটি থেকে $a\ (\neq 0)$ এবং $b(\neq 0)$ অপসারণ করলে যে আংশিক অবকল সমীকরণ (partial differential equation) পাওয়া যাবে, সেটি হল

(অ) $\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=0$ (আ) $\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=1$

(ই) $\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=0$ (ঈ) $\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=1$ ।

(ঞ) ধরা যাক $d = gcd(a, b)$ তাহলে $ax + by = c$ রৈখিক ডায়াফানটাইন (Diaphantine) সমীকরণটির সমাধান থাকবে যখন এবং কেবলমাত্র যখন

(অ) a, d দ্বারা বিভাজ্য (আ) b, d দ্বারা বিভাজ্য

(ই) c, d দ্বারা বিভাজ্য (ঈ) এদের কোনোটিই নয়।

বিভাগ - খ

(Differential Calculus II)

(ইউনিট - ১)

(মান : ১৫)

যে-কোনো তিনটি প্রশ্নের উত্তর দাও।

২। দেখাও যে, $\{u_n\}$ অনুক্রমটি ক্রমবর্ধমান এবং উপরে সীমাবদ্ধ যখন $u_n = \frac{3n}{n+1}, n \in \mathbb{N}$ এটির সীমা নির্ণয় করো। ২+২+১

৩। (ক) একটি উদাহরণসহ ব্যাখ্যা করো ঃ দোদুল্যমান অসীম শ্রেণি।

(খ) $x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{x^7}{7} + \ldots\ldots$ শ্রেণিটির অভিসারিত্ব পরীক্ষা করো। ২+৩

৪। (ক) $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} (1-\sin x)\tan x$-এর মান নির্ণয় করো।

(খ) $f(x) = 4-(6-x)^{2/3}$ অপেক্ষকটিতে [5, 7] অন্তরে Lagrange's Mean Value theorem প্রয়োগ করা যাবে কিনা পরীক্ষা করে দেখাও। ২+৩

৫। $f(x) = x - \log\left(1+x^2\right), x \in \mathbb{R}$ অপেক্ষকটির চরম এবং অবম মান (যদি থাকে) নির্ণয় করো। ৫

৬। Lagrange-র "অনির্ধারিত গুণক-এর সাহায্যে প্রমাণ করো যে $u = x^2+y^2+z^2$-এর প্রান্তিক মান পাওয়া যাবে যখন $x = \frac{30}{19}, y = \frac{45}{19}, z = \frac{75}{19}$, যেখানে শর্ত হল $2x + 3y + 5z = 30$। ৫

বিভাগ - গ

(Differential Equation II)

(ইউনিট - ২)

(মান : ৫)

যে-কোনো একটি প্রশ্নের উত্তর দাও। ৫×১

৭। সমাধান করো ঃ $x^2\frac{d^2y}{dx^2} + 3x\frac{dy}{dx} + 2y = \cos(\log x)$

৮। Lagrange's পদ্ধতি প্রয়োগ করে নিম্নলিখিত আংশিক অবকল সমীকরণটি (Partial Differential Equation) সমাধান করো ঃ $\tan x\frac{\partial z}{\partial x} + \tan y\frac{\partial z}{\partial y} = \tan z$

বিভাগ - ঘ

(Vector Algebra)

(ইউনিট - ৩)

(মান : ৫)

যে-কোনো একটি প্রশ্নের উত্তর দাও। ৫×১

৯। যদি $\vec{\alpha}=\frac{1}{7}\left(2\hat{i}+3\hat{j}+6\hat{k}\right)$, $\vec{\beta}=\frac{1}{7}\left(3\hat{i}-6\hat{j}+2\hat{k}\right)$ এবং $\vec{\gamma}=\frac{1}{7}\left(6\hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k}\right)$। তখন $|\vec{\alpha}|, |\vec{\beta}|, |\vec{\gamma}|$-এর মান নির্ণয় করো এবং দেখাও যে, $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ পরস্পর পরস্পরের সহিত লম্ব ও $\vec{\alpha}\times\vec{\beta}=\vec{\gamma}$ ।

১০। 15 একক-এর একটি বল $\hat{i}-2\hat{j}+2\hat{k}$ ভেক্টরের দিকে (Direction) (2, – 2, 2) বিন্দু দিয়ে যাচ্ছে। বলটির টর্ক (1, 1, 1) বিন্দুতে [moment about the point (1, 1, 1)] নির্ণয় করো।

বিভাগ - ঙ

(Discrete Mathematics)

(ইউনিট - ৪)

(মান : ৩০)

যে-কোনো তিনটি প্রশ্নের উত্তর দাও।

১১। (ক) Mathematical Induction-এর সাহায্যে প্রমাণ করো যে, $1^3+2^3+3^3+.....+n^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$ $n\in\mathbb{N}$.

(খ) $5x + 7y = 100$-এর ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যার সমাধান (Positive integral solutions) নির্ণয় করো। ৫+৫

১২। (ক) সর্বনিম্ন ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যাটি (Least positive integer) নির্ণয় করো যেটিকে 3, 5 ও 11 দ্বারা ভাগ করলে যথাক্রমে 2, 3 ও 4 ভাগশেষ থাকবে।

(খ) যদি $\gcd(a,b)=1$ হয়, তবে প্রমাণ করো $\gcd\left(a^2,b^2\right)=1$ ৫+৫

১৩। (ক) Wilson-এর উপপাদ্যটি লেখো। 7^{100} এর একক স্থানীয় অঙ্কটি বের করো।

(খ) 1! + 2! + 3! + ... + 100! কে 15 দিয়ে ভাগ করলে ভাগশেষ কত হবে নির্ণয় করো। ৫+৫

১৪। (ক) নিম্নলিখিত ISBNটি সঠিক কিনা নির্ণয় করো— 81-213-0871-9।

(খ) প্রমাণ করো, $\phi(5n) = 5\phi(n)$ যখন এবং কেবলমাত্র যখন n, 5 দ্বারা বিভাজ্য। ৫+৫

১৫। (ক) $f = x \cdot y' + (y+z)' \cdot (x+y)$ বুলীয় অপেক্ষকটিকে x, y, z চলরাশির জন্য DNF-এ রূপান্তরিত করো।

(খ) একটি Switching Circuit নির্মাণ করো যেটি নীচের সত্যসারণীকে সিদ্ধ করে। Circuit-টিকে সরলীকৃত করো। ৫+৫

x	y	z	$f(x, y, z)$
1	1	1	1
1	1	0	0
1	0	1	1
1	0	0	0
0	1	1	0
0	1	0	0
0	0	1	1
0	0	0	0

[**English Version**]

The figures in the margin indicate full marks.

Group - A

(Marks : 10)

1. Choose the correct alternatives : 1×10

(a) The sequence $\left\{(-1)^n \cdot n\right\} = \{-1, 2, -3, 4, ...\}$ is,

(i) bounded below (ii) bounded above

(iii) oscillatory (iv) None of these.

(b) If a function f be defined by $f(x) = (x-1)^3, x \in R$, then

(i) f has maximum at $x = 1$

(ii) f has minimum at $x = 1$

(iii) f has neither maximum nor minimum at $x = 1$

(iv) None of these.

(c) The series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{(n+2)(n+3)}$ is

(i) convergent (ii) divergent

(ii) oscillatory (iv) None of these.

(d) The particular integral of $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = e^x$ is

(i) $\frac{1}{2}x^2e^x$ (ii) x^2e^x

(iii) xe^x (iv) None of these.

(e) The value of $\lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$ is

(i) 1 (ii) $\frac{1}{2}$

(iii) $\frac{1}{3}$ (iv) $\frac{1}{6}$.

(f) If $|\vec{p}| = 10$ and $|\vec{q}| = 1$ and $|\vec{p} \times \vec{q}| = 8$, then the value of $\vec{p} \cdot \vec{q}$ is

(i) 4 (ii) 8

(iii) 6 (iv) None of these.

(g) The angle between the vectors $\vec{\alpha} = 2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ and $\vec{\beta} = 3\hat{i} + 4\hat{k}$ is

(i) $\cos^{-1}\left(\frac{2}{15}\right)$ (ii) $\cos^{-1}\left(\frac{1}{15}\right)$

(iii) $\cos^{-1}\left(\frac{1}{5}\right)$ (iv) $\cos^{-1}\left(\frac{4}{15}\right)$.

(h) In Boolean Algebra $xy(x' + y')$ is equal to

(i) 1 (ii) x^2

(iii) y^2 (iv) 0.

(i) The partial differential equation obtained by eliminating the arbitrary constant $a\ (\neq 0)$ and $b(\neq 0)$ from the function $az + b = a^2x + y$ is

(i) $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ (ii) $\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 1$

(iii) $\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ (iv) $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 1$.

(j) Let $d = gcd(a, b)$. Then the Diophantine equation $ax + by = c$ has a solution iff

(i) d divides a (ii) d divides b

(iii) d divides c (iv) None of these.

Group - B

(Differential Calculus II)

(Unit - 1)

(Marks : 15)

Answer ***any three*** questions.

2. Show that the sequence $\{u_n\}$ is monotonic increasing and bounded above when $u_n = \frac{3n}{n+1}, n \in \mathbb{N}$. Find its limit. 2+2+1

3. (a) Define an oscillatory infinite series with an example.

(b) Examine the convergence of the series :

$$x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{x^7}{7} + ...$$ 2+3

4. (a) Evaluate $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (1-\sin x)\tan x$.

(b) Examine whether Lagrange's Mean Value theorem can be applied to the function $f(x) = 4-(6-x)^{2/3}$ in the interval [5, 7]. 2+3

5. Find the maxima and minima (if exists) of $f(x) = x - \log\left(1+x^2\right), x \in \mathbb{R}$. 5

6. Using the Lagrange's method of undetermined multiplier, show that an extreme value of $u = x^2 + y^2 + z^2$, subject to the condition $2x + 3y + 5z = 30$ is attained at $x = \frac{30}{19}, y = \frac{45}{19}, z = \frac{75}{19}$. 5

Group - C

(Differential Equation II)

(Unit - 2)

(Marks : 5)

Answer ***any one*** question. 5×1

7. Solve : $x^2\frac{d^2y}{dx^2} + 3x\frac{dy}{dx} + 2y = \cos(\log x)$.

8. Solve the following linear partial differential equation by Lagrange's method : $\tan x\frac{\partial z}{\partial x}+\tan y\frac{\partial z}{\partial y}=\tan z$.

Group - D
(Vector Algebra)
(Unit - 3)
(Marks : 5)

Answer ***any one*** question. 5×1

9. If $\vec{\alpha}=\frac{1}{7}\left(2\hat{i}+3\hat{j}+6\hat{k}\right)$, $\vec{\beta}=\frac{1}{7}\left(3\hat{i}-6\hat{j}+2\hat{k}\right)$ and $\vec{\gamma}=\frac{1}{7}\left(6\hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k}\right)$. Find $|\vec{\alpha}|,|\vec{\beta}|,|\vec{\gamma}|$ and show that $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ are mutually perpendicular and $\vec{\alpha}\times\vec{\beta}=\vec{\gamma}$.

10. A force of 15 units acts in the direction of the vector $\hat{i}-2\hat{j}+2\hat{k}$ and passes through a point (2, – 2, 2). Find the moment of the force about the point (1, 1, 1).

Group - E
(Discrete Mathematics)
(Unit - 4)
(Marks : 30)

Answer ***any three*** questions.

11. (a) Prove by mathematical Induction $1^3+2^3+3^3+.....+n^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$ $n\in\mathbb{N}$.

(b) Find all positive integral solutions of $5x + 7y = 100$. 5+5

12. (a) Find the least positive integer which yields remainders 2, 3 and 4 when divided by 3, 5 and 11 respectively.

(b) Prove that $\gcd\left(a^2,b^2\right)=1$ if $\gcd(a,b)=1$. 5+5

13. (a) State Wilson's theorem. Find the digit of the unit place of 7^{100}.

(b) What is the remainder when 1! + 2! + 3! + ... + 100! is divided by 15? 5+5

14. (a) Determine whether the following ISBN is valid— 81-213-0871-9.

(b) Prove that $\phi(5n) = 5\phi(n)$ iff 5 divides n. 5+5

15. (a) Express the Boolean function $f = x \cdot y' + (y + z)' \cdot (x + y)$ in DNF in the variables x, y, z.

(b) Find a switching circuit which realizes the switching function $f(x, y, z)$ given by the following truth table. Simplify the circuit.

x	y	z	$f(x, y, z)$
1	1	1	1
1	1	0	0
1	0	1	1
1	0	0	0
0	1	1	0
0	1	0	0
0	0	1	1
0	0	0	0

5+5