2021

MATHEMATICS — GENERAL

Second Paper

Full Marks : 100

Candidates are required to give their answers in their own words as far as practicable.

প্রান্তলিখিত সংখ্যাগুলি পূর্ণমান নির্দেশক।

মডিউল - III

(মান : ৫০)

বিভাগ - ক

(মান : ২৫)

১নং প্রশ্ন এবং ***যে-কোনো দুটি*** প্রশ্নের উত্তর দাও।

১। (ক) ***যে-কোনো একটি*** প্রশ্নের উত্তর দাও ঃ ২×১

(অ) যদি তিনটি সেটের সেট $A = \{p, q, r\}$, সেট $B = \{s, t, u\}$ এবং সেট $C = \{s, u\}$, তবে দেখাও যে, $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$।

(আ) দেখাও যে কোনো দলে একটির বেশি একক উপাদান থাকতে পারে না।

(ই) একটি মণ্ডল $(R, +, \cdot)$-তে $a^2 = a, \ \forall a \in R$। প্রমাণ করো, $a + a = 0, \ \forall a \in R$, [যেখানে 0 হল R-এর শূন্য উপাদান]।

(খ) ***যে-কোনো একটি*** প্রশ্নের উত্তর দাও ঃ ৩×১

(অ) দেখাও যে $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ যেখানে $f(x) = x^2 + x, \ \forall x \in \mathbb{R}$ চিত্রণটি একৈক এবং পরিব্যপ্ত কোনোটি নয়।

(আ) প্রমাণ করো $(G, *)$ একটি বিনিময়যোগ্য দল হবে যদি এবং কেবলমাত্র যদি $(a * b)^2 = a^2 * b^2$ হয়; $\forall a, b \in G$।

(ই) একটি চক্র $(R, +, \cdot)$-এর উপচক্র S-এর উদাহরণসহ সংজ্ঞা দাও।

২। (ক) ধরা যাক $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} : a, b, d \text{ বাস্তব সংখ্যা এবং } ad \neq 0 \right\}$। স্বাভাবিক ম্যাট্রিক্স গুণনের নিয়ম মেনে প্রমাণ করো G একটি দল (Group)।

(খ) কোনো দলের উপদলের সংজ্ঞা দাও। যদি a, b দুটি নির্দিষ্ট ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা হয় এবং $H = \{ax + by \mid x, y \in \mathbb{Z}\}$ হয়, দেখাও যে $(H, +)$, $(\mathbb{Z}, +)$-এর একটি উপদল গঠন করে। ৫+(১+৪)

৩। (ক) $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ এই সেটটি $\mathbb{R}^3$-এর একটি বুনিয়াদ গঠন করে কি না পরীক্ষা করো। ($\mathbb{R}$-বাস্তব সংখ্যার সেট)

(খ) দেখাও যে $\{1, w, w^2\}$ সেটটি সাধারণ গুণফলের নিয়মে একটি দল গঠন করে। (যেখানে $w^3 = 1$)

(গ) যদি $f : A \rightarrow B$ একটি উভচিত্রণ হয়, তাহলে দেখাও যে, f^{-1} টিও একটি উভচিত্রণ হবে। ৩+৪+৩

৪। (ক) যদি $A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{3, 4, 5, 6\}$ এবং $C = \{4, 6\}$ হয়, তবে দেখাও যে $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ ।

(খ) প্রমাণ করো যে $W = \{(x, y, z) : x + y + z = 0\}$, $\mathbb{R}^3$-এর একটি উপদেশ। ৫+৫

৫। (ক) দ্বিঘাতরাশি $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy + 2xz$ নির্দিষ্টভাবে ধনাত্মক কি না পরীক্ষা করো।

(খ) Cayley-Hamilton-এর উপপাদ্যটির $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ ম্যাট্রিক্স-এর ক্ষেত্রে সত্যতা যাচাই করো। এখান থেকে ম্যাট্রিক্সটির বিপরীত ম্যাট্রিক্স নির্ণয় করো। ৫+(৩+২)

বিভাগ - খ

(মান : ২৫)

৬নং প্রশ্ন এবং ***যে-কোনো দুটি*** প্রশ্নের উত্তর দাও।

৬। (ক) ***যে-কোনো একটি*** প্রশ্নের উত্তর দাও ঃ ২×১

(অ) $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z-1}{3}$ সরলরেখাটি $x + 3y - z = 0$ সমতলটিকে যে বিন্দুতে ছেদ করে তার স্থানাঙ্ক নির্ণয় করো।

(আ) তিনটি co-ordinate axes-এর সঙ্গে সমান কোণ তৈরি করে এমন সরলরেখার direction cosine নির্ণয় করো।

(ই) $(5, 2, 4), (6, -1, 2)$ এবং $(8, -7, K)$ বিন্দু তিনটি সমরেখ হলে, K-এর মান নির্ণয় করো।

(খ) ***যে-কোনো একটি*** প্রশ্নের উত্তর দাও ঃ ৩×১

(অ) যদি yz-সমতলটি $(3, 5, -7)$ ও $(-2, 1, 8)$ বিন্দুগামী সরলরেখাকে (a, b, c) বিন্দুতে $3 : 2$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে, তাহলে a, b, c-এর মান নির্ণয় করো।

(আ) α-এর কোন মানের জন্য $x + y + z = \sqrt{3}\alpha$ সমতলটি $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z - 6 = 0$ গোলকটিকে স্পর্শ করে, তার মান নির্ণয় করো।

(ই) যে শঙ্কুর শীর্ষবিন্দু $(1, 2, 3)$ বিন্দুতে এবং ভূমি $x^2 + y^2 = 25, z = 0$ বক্ররেখা; তার সমীকরণ নির্ণয় করো।

৭। (ক) $P(a, b, c)$ বিন্দু হতে $x = 0, y = 0, z = 0$ সমতল তিনটির ওপর PL, PM, PN তিনটি লম্ব অঙ্কিত হয়। দেখাও যে, LMN সমতলের সমীকরণ $x/a + y/b + z/c = 2$ ।

(খ) $5x - y - z = 0 = x - 2y + z + 3$ এবং $7x - 4y - 2z = 0 = x - y + z - 3$ সরলরেখা দুটির মধ্যে ন্যূনতম দূরত্ব নির্ণয় করো। ৫+৫

৮। (ক) একটি ঘনকের ছয়টি তলের থেকে একটি বিন্দুর দূরত্বের বর্গের যোগফল ধ্রুবক হলে দেখাও যে বিন্দুটির সঞ্চারপথ একটি গোলক।

(খ) যদি একটি সরলরেখা কোনো ঘনকের কর্ণের সঙ্গে α, β, γ এবং δ কোণ করে, তাহলে দেখাও যে,

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma + \cos^2\delta = 4/3.$$

(গ) যে লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কু $2x = 3y = 5z$ সরলরেখাগামী ও যার অক্ষ $x = y = z$, সেই শঙ্কুর সমীকরণ নির্ণয় করো।

৩+৩+৪

৯। (ক) $\frac{x-3}{2} = \frac{y-5}{-3} = \frac{z+3}{-2}$ ও $\frac{x-4}{-3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+4}{3}$ সরলরেখাদ্বয়ের বহনকারী সমতলের সমীকরণ নির্ণয় করো।

(খ) $(3, 2, 1)$ বিন্দুটির দূরত্ব $\frac{x-1}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z-2}{1}$ সরলরেখা হতে বার করো। ৫+৫

১০। (ক) $(1, 0, -1)$ শীর্ষ বিশিষ্ট এবং $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $x + y + z = 1$ বৃত্তগামী শঙ্কুর সমীকরণ নির্ণয় করো।

(খ) $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y + 5 = 0$, $x - 2y + 3z + 1 = 0$ বৃত্তটি যে গোলকের গুরুবৃত্ত তার সমীকরণ নির্ণয় করো।

৫+৫

মডিউল - IV

(মান : ৫০)

বিভাগ - ক

(মান : ২৫)

১১নং প্রশ্ন এবং ***যে-কোনো দুটি*** প্রশ্নের উত্তর দাও।

১১। (ক) ***যে-কোনো একটি*** প্রশ্নের উত্তর দাও ঃ ২×১

(অ) Cauchy-এর মধ্যম মান উপপাদ্য বিবৃত করো।

(আ) দেখাও যে $\underset{(x,y)\to(0,0)}{Lt} \frac{xy}{x^2+y^2}$ -এর অস্তিত্ব নেই।

(খ) ***যে-কোনো একটি*** প্রশ্নের উত্তর দাও ঃ ৩×১

(অ) Maclaurin's উপপাদ্য-এর দ্বারা $(1 + x)^5$-কে শ্রেণিতে বিস্তৃত করো।

(আ) L'Hospital-এর নিয়ম ব্যবহার করে নিম্নলিখিত সীমার মান বের করো ঃ

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{\sin x}}{x - \sin x}$$

(ই) $f(x, y) = |x| + |y|$ এই অপেক্ষকটি $(0, 0)$-তে সন্তত কি না যাচাই করো।

১২। (ক) যদি $u(x, y) = \tan^{-1}\dfrac{x^3 + y^3}{x - y}$ হয়, তবে সমসত্ত্ব অপেক্ষকের ওপর Euler's-এর উপপাদ্য ব্যবহার করে প্রমাণ করো $x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} = \sin 2u$ ।

(খ) দেখাও যে $x^2 \log\left(1/x\right)$-এর চরম মান $\dfrac{1}{2e}$ । যেখানে, $x > 0$। ৫+৫

১৩। (ক) sin$x$-কে x-এর Power-এ range of validity উল্লেখ করে বিস্তৃত করো।

(খ) যদি $u = \log(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)$ হয়, তবে দেখাও যে $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = \dfrac{-3}{(x + y + z)^2}$ । ৫+৫

১৪। (ক) মান নির্ণয় করো ঃ $\underset{x \to 0}{Lt}\left(\dfrac{\tan x}{x}\right)^{1/x}$ ।

(খ) Implicit function উপপাদ্য-এর সাহায্যে $x^2 + xy + y^2 - 7 = 0$-কে (2, 1) বিন্দুর নিকট $y = \phi(x)$ আকারে প্রকাশ করো। ৫+৫

১৫। (ক) দুটি চলরাশির জন্য একটি সমসত্ত্ব অপেক্ষকের ওপরে Euler-এর উপপাদ্যটি বিবৃত করো এবং প্রমাণ করো।

(খ) $x^2 + y^2 + z^2$ রাশিটির অবম মান নির্ণয় করো যেখানে $2x + 3y + 5z = 30$। (১+৪)+৫

বিভাগ - খ

(মান : ১৫)

১৬নং প্রশ্ন এবং ***যে-কোনো তিনটি*** প্রশ্নের উত্তর দাও।

১৬। ***যে-কোনো একটি*** প্রশ্নের উত্তর দাও ঃ

(ক) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{(x+1)(x+2)}$ অভিসারী কি না যাচাই করো। ৩

(খ) মান নির্ণয় করো ঃ $\displaystyle\int_0^2 \int_{-y}^{\sqrt{y}} (1 + x + y)\,dx\,dy$ ৩

(গ) Gamma-অপেক্ষকের সংজ্ঞা দাও। Gamma অপেক্ষক ও Beta অপেক্ষকের সম্পর্ক কী তা লেখো।
$\beta\left(1/2, 1/2\right)$-এর মান নির্ণয় করো। ১+১+১

১৭। যদি $I_n = \int_0^{\pi/2} x^n \sin x \, dx, (n > 1)$ হয়, প্রমাণ করো $I_n + n(n-1)I_{n-2} = n\left(\pi/2\right)^{n-1}$ । ৪

১৮। $x = a(\theta + \sin\theta), y = a(1 + \cos\theta)$ cycloid-টি তার নিম্নদেশের চতুর্দিকে ঘূর্ণায়নের ফলে লব্ধ বস্তুটির ঘনফল নির্ণয় করো। ৪

১৯। প্রমাণ করো যে, $\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{\sin\theta}} \times \int_0^{\pi/2} \sqrt{\sin\theta}\, d\theta = \pi$ । ৪

২০। (0, C) ও (C, 0) বিন্দুর মধ্যস্থ $x^{2/3} + y^{2/3} = C^{2/3}$ বক্ররেখাটির দৈর্ঘ্য নির্ণয় করো। ৪

২১। $y = 0;\ x = 1;\ y = x$ সরলরেখা দ্বারা সীমাবদ্ধ ত্রিভুজের মধ্যে $\iint \sqrt{4x^2 - y^2}\, dx\, dy$ -এর মান নির্ণয় করো। ৪

বিভাগ - গ

(মান : ১০)

২২। ***যে-কোনো একটি*** প্রশ্নের উত্তর দাও ঃ ২×১

(ক) $\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 4y = \sin x$ -এর পূরক অপেক্ষকটি নির্ণয় করো।

(খ) $\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - 2y = e^{2x}$ -এর বিশেষ সমাকল নির্ণয় করো।

২৩। ***যে-কোনো দুটি*** প্রশ্নের উত্তর দাও ঃ ৪×২

(ক) সমাধান করো ঃ $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = x^2 \cdot e^{3x}$

(খ) সমাধান করো ঃ $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + 5y = 10\sin x$

(গ) সমাধান করো ঃ $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + y = x\log x$

(ঘ) সমাধান করো ঃ $(x+1)^2 \frac{d^2y}{dx^2} - 4(x+1)\frac{dy}{dx} + 4y = x^2$

[English Version]

The figures in the margin indicate full marks.

Module - III

(Marks : 50)

Group - A

(Marks : 25)

Answer ***question no.* 1** and ***any two*** questions from the rest.

1. (a) Answer ***any one*** question : 2×1

(i) For the three sets $A = \{p, q, r\}$, $B = (s, t, u)$ and $C = \{s, u\}$.
Verify that $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$.

(ii) Show that in a group, there cannot be more than one identity element.

(iii) If in a ring $(R, +, \cdot)$, $a^2 = a$, $\forall\, a \in R$; prove that $a + a = 0$, $\forall\, a \in R$, (0 is the zero element of R).

(b) Answer ***any one*** question : 3×1

(i) Show that the function $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, where $f(x) = x^2 + x$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$ is neither injective nor surjective.

(ii) Prove that a group $(G, *)$ is commutative iff $(a * b)^2 = a^2 * b^2$; $\forall\, a, b \in G$.

(iii) Give the definition with example of a subrings of a ring $(R, +, \cdot)$.

2. (a) Let G be a set of all 2×2 matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$, where a, b, d are real numbers such that $ad \neq 0$. Prove that G is a group under usual matrix multiplication.

(b) Define a subgroup of a group $(G, \cdot)$. Let a, b be two fixed positive integers and

$$H = \{ax + by \mid x, y \in \mathbb{Z}\},$$

show that $(H, +)$ is a subgroup of the group $(\mathbb{Z}, +)$ of integers. 5+(1+4)

3. (a) Check whether the set of vectors $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ form a basis of $\mathbb{R}^3$. ($\mathbb{R}$-set of real numbers)

(b) Prove that the set $\{1, w, w^2\}$, where $w^3 = 1$, forms a group with respect to multiplication.

(c) If $f : A \to B$ be a bijective mapping, then prove that f^{-1} is also bijective. 3+4+3

4. (a) If $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4, 5, 6\}$ and $C = \{4, 6\}$, then show that $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

(b) Prove that $W = \{(x, y, z) : x + y + z = 0\}$ is a subspace of $\mathbb{R}^3$. 5+5

5. (a) Check whether the quadratic form $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy + 2xz$ is positive definite or not.

(b) Verify Cayley-Hamilton theorem for the matrix $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ and hence find the inverse of the matrix.

5+(3+2)

Group - B

(Marks : 25)

Answer ***question no.*** **6** and ***any two*** questions from the rest.

6. (a) Answer ***any one*** question : 2×1

(i) Find the point at which the line $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z-1}{3}$ meets the plane $x + 3y - z = 0$.

(ii) Find the direction cosines of a straight line that makes equal angles with each of the co-ordinate axes.

(iii) If three points (5, 2, 4), (6, – 1, 2) and (8, –7, K) are collinear, find the value of K.

(b) Answer ***any one*** question : 3×1

(i) If the yz-plane divides the straight line joining the point (3, 5, –7) and (–2, 1, 8) in the ratio 3 : 2 internally at the point (a, b, c). Find a, b, c.

(ii) Find the value of α for which the plane

$$x + y + z = \sqrt{3}\alpha$$

touches the sphere $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z - 6 = 0$.

(iii) Find the equation of the right circular cone whose vertex is the point (1, 2, 3) and base is the curve $x^2 + y^2 = 25,\ z = 0$.

7. (a) Perpendiculars PL, PM, PN are drawn from the point P(a, b, c) to the co-ordinate planes. Show that the equation of the plane LMN is $x/a + y/b + z/c = 2$.

(b) Find the shortest distance between the lines $5x - y - z = 0 = x - 2y + z + 3$ and $7x - 4y - 2z = 0 = x - y + z - 3$. 5+5

8. (a) A point moves such that the sum of the squares of its distances from the six faces of a cube is constant. Show that its locus is a sphere.

(b) A line makes angles α, β, γ and δ with the four diagonals of a cube, then prove that $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma + \cos^2\delta = 4/3$.

(c) Find the equation of the right circular cone which passes through the line $2x = 3y = 5z$ and has the line $x = y = z$ as its axes. 3+3+4

9. (a) Find the equation of plane containing the lines $\frac{x-3}{2}=\frac{y-5}{-3}=\frac{z+3}{-2}$ and $\frac{x-4}{-3}=\frac{y+1}{2}=\frac{z+4}{3}$.

(b) Find the distance of the point (3, 2, 1) from the line $\frac{x-1}{3}=\frac{y}{4}=\frac{z-2}{1}$. 5+5

10. (a) Find the equation of the cone whose vertex is $(1, 0, -1)$ and which passes through the circle $x^2+y^2+z^2=4,\ x+y+z=1$.

(b) Obtain the equation of the sphere having the circle $x^2+y^2+z^2+2x-4y+5=0,\ x-2y+3z+1=0$ is a great circle. 5+5

Module - IV

(Marks : 50)

Group - A

(Marks : 25)

Answer ***question no.*** **11** and ***any two*** questions from the rest.

11. (a) Answer ***any one*** question : 2×1

(i) State Cauchy Mean Value Theorem.

(ii) Show that $\underset{(x,y)\to(0,0)}{Lt}\frac{xy}{x^2+y^2}$ does not exist.

(b) Answer ***any one*** question : 3×1

(i) With the help of Maclaurin's theorem expand $(1+x)^5$ in a series.

(ii) Use L'Hospital rule to evaluate $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{\sin x}}{x-\sin x}$.

(iii) Examine the continuity of the function $f(x, y)=|x|+|y|$ at the origin.

12. (a) Let $u(x,y)=\tan^{-1}\frac{x^3+y^3}{x-y}$. Then apply Euler's theorem on homogeneous function to prove

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=\sin 2u.$$

(b) Show that the maximum value of $x^2\log\left(1/x\right)$ is $\frac{1}{2e}$. [where $x>0$] 5+5

13. (a) Expand sin$x$ in an infinite series stating the range of validity of the expansion.

(b) If $u = \log(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)$, then show that $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = \dfrac{-3}{(x+y+z)^2}$. 5+5

14. (a) Evaluate : $\underset{x\to 0}{Lt}\left(\dfrac{\tan x}{x}\right)^{1/x}$.

(b) Use the Implicit function theorem to solve $x^2 + xy + y^2 - 7 = 0$ in the form $y = \phi(x)$ near the point (2, 1). 5+5

15. (a) State and prove Euler's theorem on homogeneous function of two variables.

(b) Find the minimum value of $x^2 + y^2 + z^2$ subject to the condition $2x + 3y + 5z = 30$. (1+4)+5

Group - B

(Marks : 15)

Answer ***question no.*** **16** and ***any three*** questions from the rest.

16. Answer ***any one*** question :

(a) Examine the convergence of $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{(x+1)(x+2)}$. 3

(b) Evaluate : $\displaystyle\int_0^2 \int_{-y}^{\sqrt{y}} (1+x+y)\,dx\,dy$. 3

(c) Define Gamma function. What is the relation between Beta function and Gamma function? Find the value of $\beta\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$. 1+1+1

17. If $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} x^n \sin x\,dx\ (n>1)$, prove that $I_n + n(n-1)I_{n-2} = n\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n-1}$. 4

18. Find the volume of the solid of revolution obtained by revolving the cycloid $x = a(\theta + \sin\theta)$, $y = a(1 + \cos\theta)$ about its base. 4

19. Prove that $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{\sin\theta}} \times \int_0^{\pi/2} \sqrt{\sin\theta}\,d\theta = \pi$. 4

20. Find the length of the arc of the curve $x^{2/3} + y^{2/3} = C^{2/3}$ between the points (0, C) and (C, 0). 4

21. Evaluate $\iint \sqrt{4x^2 - y^2}\, dx\, dy$ over the triangular region bounded by $y = 0$; $x = 1$; $y = x$. 4

Group - C

(Marks : 10)

22. Answer ***any one*** question : 2×1

(a) Find the complementary function of the differential equation : $\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 4y = \sin x$

(b) Obtain the particular integral of $\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - 2y = e^{2x}$.

23. Answer ***any two*** questions : 4×2

(a) Solve : $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = x^2 \cdot e^{3x}$

(b) Solve : $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + 5y = 10\sin x$

(c) Solve : $x^2\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + y = x\log x$

(d) Solve : $(x+1)^2\frac{d^2y}{dx^2} - 4(x+1)\frac{dy}{dx} + 4y = x^2$