

2021

MATHEMATICS — GENERAL

Paper – DSE-A-1

(Particle Dynamics)

Full Marks : 65

Candidates are required to give their answers in their own words
as far as practicable.

প্রাপ্তলিখিত সংখ্যাগুলি পূর্ণমান নির্দেশক

বহু বিকল্পক নৈর্ব্যক্তিক প্রশ্নাবলি

১। নিম্নলিখিত সব প্রশ্নের উত্তর দাও :

১×১০

(ক) একটি কণা সরলরেখা বরাবর $x = \frac{1}{2}vt$, গতির নিয়মে চলে, যেখানে v হল t সময়ে বেগ, তাহলে ত্বরণ f হল

(অ) ধ্রুবক (আ) $f \propto x$ (ই) $f \propto -x$ (ঈ) $f \propto 1/x$ ।

(খ) নিম্নের কোনটি সঠিক?

(অ) Power = Force/velocity (আ) Power = Force × velocity
(ই) Power = Force × (velocity)² (ঈ) None of these।

(গ) m -ভরবিশিষ্ট একটি বস্তুকণার উপর $m\mu\left(x + \frac{a^4}{x^3}\right)$ পরিমাণ কেন্দ্রাভিমুখী বল ক্রিয়া করে। যদি বস্তুকণাটি 'a' দূরত্বে

স্থিরাবস্থা থেকে যাত্রা শুরু করে তবে t সময়ে তার গতিবেগ হবে,

(অ) $\sqrt{\mu\left(\frac{a^4}{x^2} - x^2\right)^{1/2}}$ (আ) $\sqrt{\mu\left(\frac{a^4}{x^4} + x^2\right)^{1/2}}$ (ই) $\sqrt{\mu\left(-\frac{a^4}{x^2} + x^2\right)^{1/2}}$ (ঈ) $-\sqrt{\mu\left(\frac{a^4}{x^2} - x^2\right)^{1/2}}$ ।

(ঘ) যদি I ঘাতের ক্রিয়ায় সরলরেখায় গতিশীল একটি কণার গতিবেগ u থেকে v তে পরিবর্তিত হয়, তবে গতিশক্তি পরিবর্তনের মান হবে

(অ) $\frac{1}{2}I(u+v)$ (আ) $\frac{1}{2}I(u-v)$ (ই) $2I(u+v)$ (ঈ) $2I(u-v)$ ।

(ঙ) u প্রারম্ভিক বেগে প্রক্ষিপ্ত কোন বস্তুকণার সর্বাধিক অনুভূমিক সীমা হবে,

(অ) $\frac{u}{g}$ (আ) ug (ই) $\frac{u^2}{g}$ (ঈ) $\frac{g}{u^2}$ ।

Please Turn Over

(চ) যদি কেন্দ্রীয় বলের প্রভাবে কোন গতিশীল কণার কেন্দ্রীয় কক্ষপথটি একটি শঙ্কুচ্ছেদ $\frac{l}{r} = 1 + e \cos \theta$ হয়, তবে বল সরলভেদে থাকবে

(অ) $\frac{1}{r^2}$ (আ) r^2 (ই) $\frac{1}{r}$ (ঈ) $\frac{1}{r^3}$ -এর সঙ্গে।

(ছ) যদি একটি বস্তুকণার ত্বরণের অভিলম্ব উপাংশ এবং স্পর্শক উপাংশ সমান হয়, তবে গতিবেগ সমানুপাতিক হবে

(অ) ψ (আ) e^ψ
(ই) $e^{2\psi}$ (ঈ) $e^{-\psi}$ -এর সঙ্গে, যেখানে $\tan \psi =$ স্পর্শকের নতি।

(জ) 10,000 গ্রাম ওজনের একটি কামানের গোলা 5000 সে.মি./সেকেন্ড গতিতে ছোঁড়া হলে তার গতিশক্তি আর্গে হবে

(অ) 100×10^9 আর্গ (আ) 125×10^9 আর্গ (ই) 200×10^9 আর্গ (ঈ) 25×10^{10} আর্গ।

(ঝ) একটি স্থির বিন্দুমুখী বল, $\frac{\mu}{r^2}$ (প্রতি ভরের এককে), দ্বারা চালিত একটি কণার পথ অধিবৃত্ত হবে যদি

(অ) $V^2 < \frac{2\mu}{r}$ (আ) $V^2 = \frac{2\mu}{r}$ (ই) $V^2 > \frac{2\mu}{r}$ (ঈ) $V^2 = \frac{\mu}{r}$ ।
(V প্রারম্ভিক গতিবেগ)

(ঞ) t কে v-এর আপেক্ষিক ধরা হলে, ত্বরণ f-এর হ্রাসের হার হয়

(অ) $f^3 \frac{d^2t}{dv^2}$ (আ) $f^2 \frac{d^2t}{dv^2}$ (ই) $f \frac{d^2t}{dv^2}$ (ঈ) $\frac{d^2t}{dv^2}$ ।

২। যে-কোনো একটি প্রশ্নের উত্তর দাও :

৫×১

(ক) m ভরবিশিষ্ট একটি কণা mn^2x আকর্ষণ বলের অধীনে একটি সরলরেখায় গতিশীল এবং সরলরেখার উপরিস্থ একটি নির্দিষ্ট বিন্দুর দিকে অভিমুখী হয় যেখানে x হল ওই নির্দিষ্ট বিন্দু থেকে দূরত্ব। যদি কণাটি ওই নির্দিষ্ট বিন্দু থেকে প্রারম্ভিক a দূরত্ব

থেকে V গতিবেগে বলের কেন্দ্রের অভিমুখে উৎক্ষিপ্ত হয় তবে দেখাও যে, কণাটি বলের কেন্দ্রে $\frac{1}{n} \tan^{-1} \left(\frac{na}{V} \right)$ সময় পরে

পৌঁছবে।

(খ) অরীয় বেগ এবং ত্বরণের উপাংশ নির্ণয় করো।

যে-কোনো পাঁচটি প্রশ্নের উত্তর দাও।

৩। সরলরেখায় গতিশীল একটি কণার উপর ত্রিভুজাংশীল বলের কার্যের হার ধ্রুবক এবং x দূরত্ব অতিক্রম করতে বলটি কণার গতিবেগকে

u থেকে v তে পরিবর্তিত করে। প্রমাণ করো যে ওই দূরত্ব অতিক্রম করতে কণাটির $\frac{3(u+v)x}{2(u^2+uv+v^2)}$ সময় লাগবে। ১০

- ৪। সরল দোলনগতি সম্পন্ন একটি কণার মধ্যবিন্দু থেকে পরপর 3 সেকেন্ডে দূরত্ব যথাক্রমে x, y এবং z হলে দেখাও যে সব পর্যায়কাল

$$\frac{2\pi}{\cos^{-1}\left(\frac{x+z}{2y}\right)} \quad | \quad ১০$$

- ৫। একটি কণা উপবৃত্তাকার পথে তার নাভি অভিমুখে প্রতি একক ভরের $\mu/(\text{দূরত্ব})^2$ বলের অধীনে চলাচ্ছে। যদি কণাটি বলকেন্দ্র

$$\text{থেকে } R \text{ দূরত্বে } V \text{ গতিবেগে উৎক্ষিপ্ত হয় তবে দেখাও যে কণাটির পর্যায়কাল } \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}} \left[\frac{2}{R} - \frac{V^2}{\mu} \right]^{-3/2} \quad | \quad ১০$$

- ৬। একক ভরের একটি বস্তুকণাকে দিগন্তের উপরে α কোণে V বেগে প্রক্ষিপ্ত করা হল যে মাধ্যমে তার বাধা বস্তুকণার গতিবেগের

$$k \text{ গুণ। প্রমাণ করো যে } \frac{1}{k} \log \left(1 + \frac{kV}{g} \tan \frac{\alpha}{2} \right) \text{ সময় পরে বস্তুকণাটির বেগের অভিমুখ দিগন্তের উপর } \frac{\alpha}{2} \text{ কোণ উৎপন্ন করবে।}$$

১০

- ৭। যদি কোনো গ্রহ তার বৃত্তাকার কক্ষপথের কোনো এক জায়গায় হঠাৎ থেমে যায় তবে প্রমাণ করো যে গ্রহটি যে সময়ে সূর্যের উপর

$$\text{পতিত হবে তা গ্রহটির আবর্তকালের } \frac{\sqrt{2}}{8} \text{ গুণ।} \quad ১০$$

- ৮। একটি বস্তুকণা একটি পথে ধাবমান যেখানে ত্বরণ $\frac{\mu}{y^3}$, যা সব সময় Y-অক্ষের সমান্তরাল এবং X-অক্ষের অভিমুখী। যদি ওই

$$\text{বস্তু কণাটিকে } (0, a) \text{ বিন্দু হতে X-অক্ষের সমান্তরাল দিকে } \frac{\sqrt{\mu}}{a} \text{ বেগে ছোড়া হয় তবে দেখাও যে বস্তুকণাটির গতিপথ একটি বৃত্ত হবে।} \quad ১০$$

- ৯। একটি ঋজু মসৃণ নল ω কৌণিক গতিবেগে আবর্তিত হয়, নলটির দৈর্ঘ্যের উপর অবস্থিত একটি বিন্দু O-এর সাপেক্ষে। O অভিমুখী একটি বল $m\mu(\text{দূরত্ব})$ -এর প্রভাবে ওই নলের মধ্যে দিয়ে বিশ্রাম অবস্থায় থাকা একটি কণা পতনশীল হয়। দেখাও যে কণাটির

$$\text{যাত্রাপথের সমীকরণ হল } r = a \cos h \left(\sqrt{\frac{\omega^2 - \mu}{\omega^2}} \theta \right) \text{ অথবা } r = a \cos \left(\sqrt{\frac{\mu - \omega^2}{\omega^2}} \theta \right), \text{ যখন } \mu \geq \omega^2 \text{। } \mu = \omega^2 \text{ হলে দেখাও}$$

যে যাত্রাপথটি বৃত্তাকার হবে।

১০

- ১০। (ক) কেপলারের তৃতীয় সূত্রটি লেখো।

$$\text{(খ) কেন্দ্রীয় বল } F \text{ (প্রতি একক ভরে) অধীনে গতিশীল একটি বস্তুর ক্ষেত্রে দেখাও যে } \frac{h^2}{p^3} \frac{dp}{dr} = F \text{।}$$

(প্রতীকগুলি স্বাভাবিক অর্থবহ)

২+৮

Please Turn Over

[English Version]

The figures in the margin indicate full marks.

Multiple Choice Questions.

1. Answer *all* the questions :

1×10

(a) If a particle moves in a straight line and the distance x from the fixed point at any time t is

$$x = \frac{1}{2}vt, \text{ where } v \text{ is the velocity at the time } t, \text{ then acceleration } f \text{ is}$$

- (i) constant (ii) $f \propto x$ (iii) $f \propto -x$ (iv) $f \propto 1/x$.

(b) Which of the following is correct?

- (i) Power = Force/velocity (ii) Power = Force \times velocity
(iii) Power = Force \times (velocity)² (iv) None of these.

(c) A particle of mass m is acted on by force $m\mu\left(x + \frac{a^4}{x^3}\right)$ towards the origin. If it starts from rest at a distance a , then its velocity at time t

- (i) $\sqrt{\mu}\left(\frac{a^4}{x^2} - x^2\right)^{1/2}$ (ii) $\sqrt{\mu}\left(\frac{a^4}{x^4} + x^2\right)^{1/2}$ (iii) $\sqrt{\mu}\left(-\frac{a^4}{x^2} + x^2\right)^{1/2}$ (iv) $-\sqrt{\mu}\left(\frac{a^4}{x^2} - x^2\right)^{1/2}$.

(d) For a rectilinear motion of a particle, if an impulse I changes its velocity from u to v , then the change in Kinetic energy is

- (i) $\frac{1}{2}I(u+v)$ (ii) $\frac{1}{2}I(u-v)$ (iii) $2I(u+v)$ (iv) $2I(u-v)$.

(e) The maximum horizontal range of a particle with initial velocity u is given by

- (i) $\frac{u}{g}$ (ii) ug (iii) $\frac{u^2}{g}$ (iv) $\frac{g}{u^2}$.

(f) If the central orbit described by a particle moving under central force is the conic $\frac{l}{r} = 1 + e \cos\theta$, then the force varies as

- (i) $\frac{1}{r^2}$ (ii) r^2 (iii) $\frac{1}{r}$ (iv) $\frac{1}{r^3}$.

(g) If the tangential and normal components of acceleration be equal, then the velocity is proportional to

- (i) ψ (ii) e^ψ (iii) $e^{2\psi}$ (iv) $e^{-\psi}$.

where $\tan \psi = \text{slope of the tangent}$.

(h) The kinetic energy in ergs of a cannon ball of 10,000 grammes discharged with a velocity of 5000 cm/second is

- (i) 100×10^9 ergs (ii) 125×10^9 ergs (iii) 200×10^9 ergs (iv) 25×10^{10} ergs.

(i) A particle moves under a force which is always directed towards a fixed point and is equal to

$\frac{\mu}{r^2}$ per unit mass, then its path will be a hyperbola if

- (i) $V^2 < \frac{2\mu}{r}$ (ii) $V^2 = \frac{2\mu}{r}$ (iii) $V^2 > \frac{2\mu}{r}$ (iv) $V^2 = \frac{\mu}{r}$.

(V is the initial velocity)

(j) If t be regarded as a function of velocity v , then the rate of decrease of acceleration f is

- (i) $f^3 \frac{d^2t}{dv^2}$ (ii) $f^2 \frac{d^2t}{dv^2}$ (iii) $f \frac{d^2t}{dv^2}$ (iv) $\frac{d^2t}{dv^2}$.

2. Answer **any one** from the following :

5×1

(a) A particle of mass m moves in a straight line under an attractive force mn^2x towards a fixed point on the line when at a distance x from it. If it be projected with a velocity V towards the centre of force from an initial distance a then prove that it reaches the centre of force after a time

$$\frac{1}{n} \tan^{-1} \left(\frac{na}{V} \right).$$

(b) Deduce expressions for radial velocity and radial accelerations.

Answer **any five** questions.

3. A particle moving in a straight line is acted on by a force which works at a constant rate and changes

its velocity from u to v in passing over a distance x . Prove that the time taken is $\frac{3(u+v)x}{2(u^2+uv+v^2)}$. 10

4. In an SHM the distance of a particle from the middle point its path at three consecutive seconds are

x, y, z respectively. Show that the time period is $\frac{2\pi}{\cos^{-1} \left(\frac{x+z}{2y} \right)}$. 10

5. A particle describes an ellipse under a force $\mu/(\text{distance})^2$ towards a forces. If it was projected with a velocity V from a point distant R from the centre of force, then show that the periodic time is 10

$$\frac{2\pi}{\sqrt{\mu}} \left[\frac{2}{R} - \frac{V^2}{\mu} \right]^{-3/2}$$

Please Turn Over

6. A particle of unit mass is projected with a velocity V at an angle α above the horizon in a medium whose resistance is k times the velocity of the particle. Prove that the direction of its velocity will make an angle $\frac{\alpha}{2}$ above the horizon after a time $\frac{1}{k} \log \left(1 + \frac{kV}{g} \tan \frac{\alpha}{2} \right)$. 10
7. If a planet was suddenly stopped in its orbit supposed circular then prove that it would fall into the Sun in a time which is $\frac{\sqrt{2}}{8}$ times the period of the planet's revolution. 10
8. A particle describes a path with an acceleration $\frac{\mu}{y^3}$ which is always parallel to the axis of Y and directed towards the X-axis. If the particle be projected from a point $(0, a)$ with the velocity $\frac{\sqrt{\mu}}{a}$ parallel to X-axis, show that the path described is a circle. 10
9. A particle falls from rest within a straight smooth tube which is revolving with uniform angular velocity ω about a point O in its length, being acted on by a force equal to $m\mu(\text{distance})$ towards O. Show that the equation to its path in space is $r = a \cos h \left(\sqrt{\frac{\omega^2 - \mu}{\omega^2}} \theta \right)$, or, $r = a \cos \left(\sqrt{\frac{\mu - \omega^2}{\omega^2}} \theta \right)$ according as $\mu \geq \omega^2$. If $\mu = \omega^2$, show that the path is a circular. 10
10. (a) Write down Kepler's third Law.
- (b) Establish the relation $\frac{h^2}{p^3} \frac{dp}{dr} = F$ for a central orbit under an attractive force F per unit mass. [Symbols have their usual meaning] 2+8