2021

MATHEMATICS — GENERAL

First Paper

Full Marks : 100

Candidates are required to give their answers in their own words as far as practicable.

প্রান্তলিখিত সংখ্যাগুলি পূর্ণমান নির্দেশক।

মডিউল - ১

বিভাগ - ক

(মান : ২০)

১নং প্রশ্ন এবং অপর ***যে-কোনো তিনটি*** প্রশ্নের উত্তর দাও।

১। (ক) ***যে-কোনো একটি*** প্রশ্নের উত্তর দাও ঃ ২×১

(অ) বিস্তার না করে প্রমাণ করো যে, $\begin{vmatrix} 0 & -2021 & -\alpha \\ 2021 & 0 & \beta \\ \alpha & -\beta & 0 \end{vmatrix} = 0$ ।

(আ) জটিল তলের উপর $P(z)$ এমন চলমান বিন্দু যার $|z + 3i| = 4$; P বিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় করো।

(ই) যে সমীকরণের বীজগুলি $-1, 2, -3$ ও 3 সেটি বের করো।

(খ) ***যে-কোনো একটি*** প্রশ্নের উত্তর দাও ঃ ৩×১

(অ) ডি ময়ভারস উপপাদ্য অনুযায়ী $x^5 = 1$ সমীকরণটির মান নির্ণয় করো।

(আ) মূলদ সহগযুক্ত একটি চতুর্থ ঘাতের (fourth degree) সমীকরণ বের করো যার একটি বীজ $\sqrt{3} + \sqrt{2}\, i$ ।

(ই) $\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটি কি লম্ব ম্যাট্রিক্স?

২। যদি $\sin^{-1}(u + iv) = a + ib$ হয়, তবে প্রমাণ করো $1 + u^2 + v^2 = \sin^2 a + \cos h^2 b$ । ৫

৩। কার্ডানের (Cardan) পদ্ধতিতে সমাধান করো ঃ $x^3 - 24x + 72 = 0$ । ৫

৪। যদি $x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 7x + 5 = 0$ সমীকরণের বীজগুলি α, β, γ এবং δ হয়, তবে যে সমীকরণের বীজগুলি $\alpha + 1, \beta + 1, \gamma + 1$ এবং $\delta + 1$ হয় তা নির্ণয় করো। ৫

৫। Cramer-এর পদ্ধতি অবলম্বনে সমাধান করো ঃ ৫

$$\begin{aligned} 3x-2y+\ z &= -1 \\ -x+\ y+7z &= \ 1 \\ 4x-3y-2z &= -2 \end{aligned}$$

৬। A ম্যাট্রিক্সের মাত্রা (rank) নির্ণয় করো ঃ ৫

$$A=\begin{bmatrix} 6 & 12 & 6 \\ -1 & -2 & 3 \\ 5 & 10 & 5 \end{bmatrix}$$

বিভাগ - খ

(মান : ১৫)

৭নং প্রশ্ন এবং অপর ***যে-কোনো দুটি*** প্রশ্নের উত্তর দাও।

৭। ***যে-কোনো একটি*** প্রশ্নের উত্তর দাও ঃ ৩×১

(ক) k-এর মান নির্ণয় করো যাতে $x^2+y^2+2x+k=0$ সমীকরণটি একজোড়া সরলরেখা সূচিত করে।

(খ) $\frac{5}{r}=2+4\cos\theta$ কণিকটির প্রকৃতি নির্ণয় করো এবং এর নাভি-লম্ব (latus rectum)-এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় করো।

(গ) দেখাও যে, $y^2=4x$ অধিবৃত্তের সাপেক্ষে $(-1, 5)$ বিন্দুটির পোলার ফোকাসের মধ্য দিয়ে যায়।

৮। $6x^2-5xy-6y^2+14x-5y+4=0$ সমীকরণটিকে আদর্শ আকারে প্রকাশ করো এবং সেখান থেকে বক্রটির (conic) প্রকৃতি নির্ণয় করো। ৬

৯। $2x^2-5xy+3y^2-2x+3y=0$ বক্ররেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু থেকে মূলবিন্দুর দূরত্ব নির্ণয় করো। ৬

১০। দেখাও যে $\frac{l}{r}=A\cos\theta+B\sin\theta$ সরলরেখাটি $\frac{l}{r}=1+e\cos\theta$ কণিকটিকে স্পর্শ করলে $(A-e)^2+B^2=1$ হবে। ৬

১১। $x^2+y^2=a^2$ বৃত্তের সাপেক্ষে P বিন্দুর পোলার (Polar) $4x^2+4y^2=a^2$ বৃত্তটিকে স্পর্শ করে। দেখাও যে, P বিন্দুর সঞ্চারপথ $x^2+y^2=4a^2$। ৬

বিভাগ - গ

(মান : ১৫)

১২নং প্রশ্ন এবং অপর ***যে-কোনো দুটি*** প্রশ্নের উত্তর দাও।

১২। ***যে-কোনো একটি*** প্রশ্নের উত্তর দাও ঃ ৩×১

(ক) x-এর কোন্ মানের জন্য $x\hat{i}-4\hat{j}+5\hat{k},\ \hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}$ এবং $2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$ ভেক্টরগুলি সমতলিক হবে।

(খ) যদি $\vec{\alpha}$ এবং $\vec{\beta}$ ভেক্টর দুটি এরূপ হয় যে, $|\vec{\alpha}| = 23, |\vec{\beta}| = 11$ এবং $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}| = 20$ হয়, তাহলে $|\vec{\alpha}-\vec{\beta}|$-এর মান নির্ণয় করো।

(গ) একটি একক ভেক্টর নির্ণয় করো যা $2\hat{i}-3\hat{j}+4\hat{k}$ এবং $3\hat{i}-2\hat{j}+2\hat{k}$-এর সঙ্গে লম্ব।

১৩। (ক) ভেক্টর উপায়ে প্রমাণ করো যে একটি রম্বসের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে লম্বভাবে ছেদ করে।

(খ) প্রমাণ করো যে কোনো প্রকৃত ভেক্টর $\vec{a}$-এর জন্য $\hat{i}\times(\vec{a}\times\hat{i})+\hat{j}\times(\vec{a}\times\hat{j})+\hat{k}\times(\vec{a}\times\hat{k}) = 2\vec{a}$ । ৪+২

১৪। (ক) কোনো কণার ওপর $2\hat{i}-3\hat{j}+\hat{k}$ এবং $3\hat{i}+\hat{j}+2\hat{k}$ স্থির বল দুটি ক্রিয়াশীল হয়ে কণাটিকে $\hat{i}-2\hat{j}+3\hat{k}$ থেকে $4\hat{i}+5\hat{j}+7\hat{k}$ বিন্দুতে স্থানচ্যুত করলে সম্পাদিত কার্যের পরিমাণ নির্ণয় করো।

(খ) α-এর মান নির্ণয় করো যাতে $\vec{a}=(2,\alpha,1)$ এবং $\vec{b}=(4,-2,-2)$ লম্ব হয়। ৪+২

১৫। প্রমাণ করো যে, তিনটি বিন্দু যাদের অবস্থান ভেক্টর হল $\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}$, $-\hat{i}-\hat{j}+8\hat{k}$ এবং $-4\hat{i}+4\hat{j}+6\hat{k}$ একটি সমবাহু ত্রিভুজ গঠন করে। ৬

১৬। যদি $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ তিনটি ভেক্টর এমন হয় যে $\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}=\vec{0}$ এবং $|\vec{\alpha}|=2, |\vec{\beta}|=4, |\vec{\gamma}|=6$, তাহলে দেখাও যে $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}+\vec{\gamma}\cdot\vec{\alpha}=-28$ । ৬

মডিউল - ২

বিভাগ - ক

(মান : ২৫)

১৭। (ক) ***যে-কোনো একটি*** প্রশ্নের উত্তর দাও ঃ ২×১

(অ) $f(x)=\dfrac{|x|}{x}+2$ অপেক্ষকটির পাল্লা (range) নির্ণয় করো।

(আ) দেখাও যে, $\{x_n\}$ অনুক্রমটি, যেখানে $x_n=\dfrac{2n+1}{4n+1}\,(n\geq 1)$, একটি একদিষ্ট অবরোহী।

(খ) ***যে-কোনো একটি*** প্রশ্নের উত্তর দাও ঃ ৩×১

(অ) কোনো অপেক্ষক $f(x)$-এর সংজ্ঞা নীচে দেওয়া হল ঃ

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{3kx+5}{x-2}, & x\neq 2\\ 47, & x=2\end{cases}$$

k-এর কোন্ মানের জন্য $f(x)$ সন্তত হবে?

(আ) $f(x)=\begin{cases} x^2, & \text{যখন } x \text{ মূলদ সংখ্যা} \\ 0\ , & \text{যখন } x \text{ অমূলদ সংখ্যা} \end{cases}$

দেখাও যে $f'(0) = 0$।

১৮। ***যে-কোনো দুটি*** প্রশ্নের উত্তর দাও ঃ

(ক) (অ) $\frac{1+2}{2^3}+\frac{1+2+3}{3^3}+\frac{1+2+3+4}{4^3}+\ldots\ldots$ শ্রেণিটির অভিসারিত্ব ব অপসারিত্ব পরীক্ষা করো।

(আ) $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় করো, যেখানে $(\cos x)^y=(\sin y)^x$ ।

(ই) $y = 2\cos x(\sin x - \cos x)$ দেখাও যে, $(y_{10})_0 = 2^{10}$ । ৫+৩+২

(খ) (অ) $1+2\sin x+3\cos^2 x\left(0\le x\le\frac{\pi}{2}\right)$-এর চরম ও অবম মান নির্ণয় করো।

(আ) কেন্দ্রের সাপেক্ষে $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ উপবৃত্তের পাদ সমীকরণ (Pedal equation) নির্ণয় করো। ৫+৫

(গ) (অ) $x^3 + 3x^2y - 4y^3 - x + y + 3 = 0$ সমীকরণটির স্পর্শপ্রবণ রেখাগুলি নির্ণয় করো।

(আ) যদি ρ_1, ρ_2 নাভিগামী কোনো জ্যা-এর প্রান্ত বিন্দুদ্বয়ে বক্রতা ব্যাসার্ধ হয়, তবে দেখাও যে

$(\rho_1)^{-2/3}+(\rho_2)^{-2/3}=(l)^{-2/3}$ যেখানে l হল অধিবৃত্তটির অর্ধ নাভি-লম্বের দৈর্ঘ্য। ৫+৫

(ঘ) (অ) যদি $x = \sin\theta$ এবং $y = \sin k\theta$ হয়, তবে প্রমাণ করো ঃ

(I) $\left(1-x^2\right)y_2 - xy_1 + k^2 y = 0$

(II) $\left(1-x^2\right)y_{n+2} - (2n+1)\,xy_{n+1} + \left(k^2-n^2\right)y_n = 0$

(আ) Cauchy's criterion ব্যবহার করে দেখাও যে (x_n) অনুক্রমটি অভিসারী (convergent) যখন

$$x_n = 1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}\ ।$$ (২+৩)+৫

বিভাগ - খ

(মান : ১০)

১৯। ***যে-কোনো একটি*** প্রশ্নের উত্তর দাও ঃ ২×১

(ক) দেখাও যে, $\int_a^b f(a+b-t)\,dt=\int_a^b f(x)\,dx$ ।

(খ) মান নির্ণয় করো ঃ $\int_0^{2\pi}|\sin x|\,dx$ ।

২০। *যে-কোনো দুটি* প্রশ্নের উত্তর দাও ঃ 8×২

(ক) সংজ্ঞা হতে মান নির্ণয় করো ঃ $\int_a^b e^x dx$ ।

(খ) দেখাও যে, $\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1+\frac{n}{n}\right)\right\}^{\frac{1}{n}}=\frac{4}{e}$ ।

(গ) মান নির্ণয় করো ঃ $\int_0^1 \cot^{-1}\left(1-x+x^2\right)dx$ ।

(ঘ) মান নির্ণয় করো ঃ $\int \frac{dx}{5-13\sin x}$ ।

বিভাগ - গ

(মান : ১৫)

২১। *যে-কোনো একটি* প্রশ্নের উত্তর দাও ঃ ৩×১

(ক) মূলবিন্দুগামী সরলরেখাগুলির অবকল সমীকরণ নির্ণয় করো।

(খ) ক্রম ও মাত্রা নির্ণয় করো ঃ $\frac{d^2y}{dx^2}=4\sqrt{y+\left(\frac{dy}{dx}\right)^3}$ ।

২২। *যে-কোনো তিনটি* প্রশ্নের উত্তর দাও ঃ 8×৩

(ক) সমাধান করো ঃ $\left(1+x^2\right)\frac{dy}{dx}+y=\tan^{-1}x$ ।

(খ) $py=p^2(x-b)+a$ অবকল সমীকরণটির সাধারণ (General) এবং বিশিষ্ট (Singular) সমাধান নির্ণয় করো, যেখানে $p=\frac{dy}{dx}$ এবং a ও b ধ্রুবকদ্বয়।

(গ) সমাধান করো ঃ $\left(x^2y^2+xy+1\right)y\,dx+\left(x^2y^2-xy+1\right)x\,dy=0$ ।

(ঘ) $\frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}=1$ ($\lambda=$ Parameter) বক্রগোষ্ঠীর লম্ব প্রক্ষেপ পথগুলি (orthogonal trajectories) নির্ণয় করো, যেখানে a ও b হল ধ্রুবক।

(ঙ) সমাধান করো ঃ $\left(y^2e^{xy^2}+4x^3\right)dx+\left(2xy\,e^{xy^2}-3y^2\right)dy=0$ ।

[English Version]

The figures in the margin indicate full marks.

Module – 1

Group – A

(Marks : 20)

Answer ***question no.*** **1** and ***any three*** questions from the rest.

1. (a) Answer ***any one*** question : 2×1

(i) Without expanding prove that $\begin{vmatrix} 0 & -2021 & -\alpha \\ 2021 & 0 & \beta \\ \alpha & -\beta & 0 \end{vmatrix} = 0$.

(ii) On the complex plane, let $P(z)$ be a variable point such that $|z + 3i| = 4$. Find the locus of P.

(iii) Find the equation whose roots are -1, 2, -3 and 3.

(b) Answer ***any one*** question : 3×1

(i) Solve $x^5 = 1$, by using De Moivre's Theorem.

(ii) Find the equation of fourth degree with rational coefficients, one root of which is $\sqrt{3} + \sqrt{2}\, i$.

(iii) Is the matrix $\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ orthogonal?

2. If $\sin^{-1}(u + iv) = a + ib$, then prove that $1 + u^2 + v^2 = \sin^2 a + \cos h^2 b$. 5

3. Solve by Cardan's method : $x^3 - 24x + 72 = 0$. 5

4. If α, β, γ and δ are the roots of the equation $x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 7x + 5 = 0$, find the equation whose roots are $\alpha + 1$, $\beta + 1$, $\gamma + 1$ and $\delta + 1$. 5

5. Solve by Cramer's Rule 5

$$\begin{aligned} 3x - 2y + z &= -1 \\ -x + y + 7z &= 1 \\ 4x - 3y - 2z &= -2 \end{aligned}$$

6. Find the rank of the matrix A, where $A = \begin{bmatrix} 6 & 12 & 6 \\ -1 & -2 & 3 \\ 5 & 10 & 5 \end{bmatrix}$. 5

Group – B

(Marks : 15)

Answer ***question no.*** **7** and ***any two*** questions from the rest.

7. Answer ***any one*** question : 3×1

(a) Find the value of k, for which $x^2 + y^2 + 2x + k = 0$ represents a pair of straight lines.

(b) Determine the nature of the conic $\frac{5}{r} = 2 + 4\cos\theta$ and also find the length of its latus rectum.

(c) Show that the polar of the point (– 1, 5) with respect to the parabola $y^2 = 4x$ passes through the focus.

8. Reduce the equation $6x^2 - 5xy - 6y^2 + 14x - 5y + 4 = 0$ to its canonical form and hence determine the nature of the conic. 6

9. Find the distance from the origin of the point of intersection of the straight lines given by

$$2x^2 - 5xy + 3y^2 - 2x + 3y = 0.$$ 6

10. Show that if $\frac{l}{r} = A\cos\theta + B\sin\theta$ touches $\frac{l}{r} = 1 + e\cos\theta$, then $(A-e)^2 + B^2 = 1$. 6

11. The polar of the point P with respect to the circle $x^2 + y^2 = a^2$ touches the circle $4x^2 + 4y^2 = a^2$. Show that the locus of P is $x^2 + y^2 = 4a^2$. 6

Group – C

(Marks : 15)

Answer ***question no.*** **12** and ***any two*** questions from the rest.

12. Answer ***any one*** question : 3×1

(a) Find the value of x for which the vectors $x\hat{i} - 4\hat{j} + 5\hat{k}$, $\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ and $2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ are coplanar.

(b) If $\vec{\alpha}$ and $\vec{\beta}$ are two vectors such that $|\vec{\alpha}| = 23, |\vec{\beta}| = 11$ and $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = 20$, find $|\vec{\alpha} - \vec{\beta}|$.

(c) Find an unit vector perpendicular to $2\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}$ and $3\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}$.

13. (a) Prove by vector method that the diagonals of a rhombus are perpendicular to each other.

(b) Prove that, for any proper vector $\vec{a}$, $\hat{i} \times (\vec{a} \times \hat{i}) + \hat{j} \times (\vec{a} \times \hat{j}) + \hat{k} \times (\vec{a} \times \hat{k}) = 2\vec{a}$. 4+2

14. (a) A particle acted on by constant forces $2\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k}$ and $3\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$ is displaced from the point $\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}$ to the point $4\hat{i} + 5\hat{j} + 7\hat{k}$. Find the amount of work done.

(b) Determine the value of α so that $\vec{a} = (2, \alpha, 1)$ and $\vec{b} = (4, -2, -2)$ are perpendicular. 4+2

15. Prove that the three points whose position vectors are $\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}, -\hat{i}-\hat{j}+8\hat{k}$ and $-4\hat{i}+4\hat{j}+6\hat{k}$ form an equilateral triangle. 6

16. If $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ are three vectors such that $\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}=\vec{0}$ and $|\vec{\alpha}|=2, |\vec{\beta}|=4, |\vec{\gamma}|=6$, then show that

$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}+\vec{\gamma}\cdot\vec{\alpha}=-28$. 6

Module – 2

Group – A

(Marks : 25)

17. (a) Answer ***any one*** question : 2×1

(i) Find the range of the real-valued function of a real variable, $f(x)=\frac{|x|}{x}+2$.

(ii) Show that the sequence $\{x_n\}$, where $x_n=\frac{2n+1}{4n+1}\ (n\geq 1)$, is monotonically decreasing.

(b) Answer ***any one*** question : 3×1

(i) A function $f(x)$ defined by $f(x)=\begin{cases}\frac{3kx+5}{x-2}, & x\neq 2\\ 47, & x=2\end{cases}$. For what value(s) of $k, f(x)$ is continuous?

(ii) Let $f(x)=\begin{cases}x^2, & \text{when } x \text{ is rational}\\ 0, & \text{when } x \text{ is irrational}\end{cases}$.

Show that $f'(0)=0$.

18. Answer ***any two*** questions :

(a) (i) Examine the convergence of the series : $\frac{1+2}{2^3}+\frac{1+2+3}{3^3}+\frac{1+2+3+4}{4^3}+\ldots\ldots$

(ii) Find $\frac{dy}{dx}$, if $(\cos x)^y=(\sin y)^x$.

(iii) $y=2\cos x(\sin x-\cos x)$. Show that $(y_{10})_0=2^{10}$. 5+3+2

(b) (i) Find the maxima and minima of $1+2\sin x+3\cos^2 x\left(0\leq x\leq\frac{\pi}{2}\right)$.

(ii) Find the pedal equation of the ellipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ with respect to centre. 10

(c) (i) Find the asymptote of the curve $x^3 + 3x^2y - 4y^3 - x + y + 3 = 0$.

(ii) Prove that the radii of curvature ρ_1 and ρ_2 at the extremeties of a focal chord of a parabola whose semi-latus rectum is l, then $(\rho_1)^{-2/3} + (\rho_2)^{-2/3} = (l)^{-2/3}$. 5+5

(d) (i) If $x = \sin\theta$ and $y = \sin k\theta$, prove that

(I) $\left(1-x^2\right)y_2 - xy_1 + k^2 y = 0$

(II) $\left(1-x^2\right)y_{n+2} - (2n+1)\,xy_{n+1} + \left(k^2 - n^2\right)y_n = 0$

(ii) Use Cauchy's criterion to show that the sequence (x_n) converges, when

$$x_n = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!}.$$ (2+3)+5

Group – B

(Marks : 10)

19. Answer ***any one*** question : 2×1

(a) Show that $\int_a^b f(a+b-t)\,dt = \int_a^b f(x)\,dx$.

(b) Find $\int_0^{2\pi} |\sin x|\,dx$.

20. Answer ***any two*** questions : 4×2

(a) Evaluate $\int_a^b e^x\,dx$ from definition.

(b) Show that $\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1+\frac{n}{n}\right)\right\}^{\frac{1}{n}} = \frac{4}{e}$.

(c) Evaluate $\int_0^1 \cot^{-1}\left(1-x+x^2\right)dx$.

(d) Evaluate $\int \frac{dx}{5-13\sin x}$.

Group – C

(Marks : 15)

21. Answer ***any one*** question : 3×1

(a) Find the differential equation of all straight lines passing through the origin.

(b) State the order and degree of $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 4\sqrt{y + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^3}$.

22. Answer ***any three*** questions : 4×3

(a) Solve $\left(1+x^2\right)\dfrac{dy}{dx} + y = \tan^{-1} x$.

(b) Obtain the general and singular solution of $py = p^2(x-b)+a$, where $p = \dfrac{dy}{dx}$ and a, b constants.

(c) Solve $\left(x^2y^2 + xy + 1\right)y\,dx + \left(x^2y^2 - xy + 1\right)x\,dy = 0$.

(d) Obtain the orthogonal trajectories of the family of curve $\dfrac{x^2}{a^2+\lambda} + \dfrac{y^2}{b^2+\lambda} = 1$, where λ is the arbitrary parameter and a and b are given constants.

(e) Solve $\left(y^2 e^{xy^2} + 4x^3\right)dx + \left(2xy\, e^{xy^2} - 3y^2\right)dy = 0$.